称重信号的抽样和处理（二）

周祖濂

一、前言

在称重信号抽样和处理（一）中，主要讲述由连续信号经抽样为离散信号或数字信号必须遵循的两个定律。抽样定理或 Nyguist 定律和测不准原理或不确定性原理。根据这两个定律，确定抽样率必须大于信号最高频率的两倍，和抽样的时间确定了信号的最低分辨频率或滤波的低频限。

在第（二）部分，我将列举一些实例供参考。离散信号的处理和滤波是一个专门学科，仅对其简单的讲述都需要很大的篇幅，所以对所举实例不做太多解述。有兴趣的读者可找有关资料阅读。

二、平均、加权平均和梳状滤波器

2.1 平均

对数字信号的数据取平均的方法是在处理称重信号使用最广泛的方法。几乎所有的静态秤信号都是采对数据取平均的方法来获得被称物的重量。学过富利叶变换的读者都知道，由频域的观点看数字平均，也是一种滤波的过程，它的作用类似一低通滤波器。在数字信号处理中，我们将这样一种有限长抽样称为对信号的“矩形窗”抽样（参看图 1）。图中示出一限长抽样所对应的低通滤波器幅频特性。即“矩形窗”所对应的富利叶变换后得到在频域的幅频特性。其幅频特性的数字解析表示式如下：

$$H(f)=2AT\cdot\frac{Sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$

与之对应的取样矩形脉冲（时域）表示式为：

$$h(t)=\begin{cases}A & |t|<T_0\\ \dfrac{A}{2} & t=\pm T_0\\ 0 & |t|>T_0\end{cases}$$

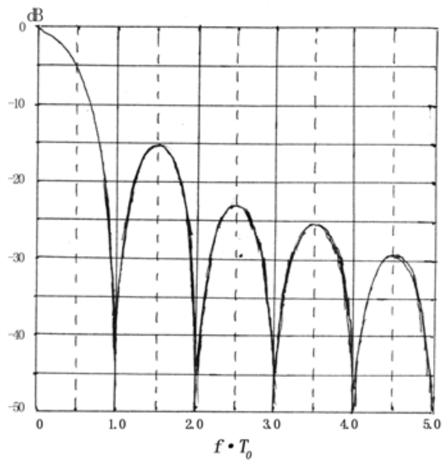

图 1

其滤波结果近似于一个T_0=2RC滤波的一级阻容模拟滤波器，即衰（减）量为每信频程 20 分贝（20dB/decade）。

上面的描述，均由模拟系统得到的结论。下面我将按数字系统来描述滤波的过程。

最常用的多点平均的时域表示式为

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\times(n)$$

与之对应的频率响应为：

$$F(\omega)=|\frac{Sin(N\pi fT)}{NSin(\pi fT)}|$$

其中 $f=1/_{\tau}$ 为抽样率，T 为抽样周期（时间），且 N τ =T。

为了提高多点平均滤波器的阻止衰减，可采用下述修正滤波器

$$f(n)=\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\times(n)\right]^{k}$$

相应的频率响应为

$$F(\omega)=\left[\frac{Sin(n\pi fT)}{NSin(\pi fT)}\right]^{k}$$

K 称为梳状滤波器的阶，这种滤波器在Σ-△A/D 转换器中广为运用。它首先将Σ-△转换器输出的离抽样率的一位Σ-△码转换成低抽样率为 12 位或 16 位的数字信号。

在系统理论中，凡是系统函 H（ω）是周期函数

$$H(\omega+2\pi/T)=H(\omega)$$

所构成的滤波器均称为梳状滤波器。根据泊松求和公式（Poisson’s Sum formula）：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(t+nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\quad y(m\omega_0)e^{in\omega_0 t}$$

其中ω_0=2π/T，上式表明时域梳状函数的富利叶变换为频域的梳状函数。多点平均就属放时域等间隔的取样，所以相应的频响为脉冲状频率的周期函数，故为梳状滤波器。

2.2 加权平均

也称为加“窗”平均，我们在对信号实际抽样时，往时把一个很长时序的信号，根据需要将其截短，截点就是把该时序限定为有限和可能的有限的 N 点。这样就使得该时序列的 N 点以外的值人为的实然变为零。等于将序列乘以一个“矩形窗”口。变成一个有限宽度的脉冲形。由于波形边缘的突变将产生很多附加频率成份，这种现象称为“泄漏”。这种效应是在有限点的取样中必然发生的现象。对多点平均取样而言：当截断的波形不是被过滤的信号周期的整信数将产生附加的直流成份、特别是当被过滤信号最低频率周期与抽样时间相近时，由此将产生的误差越大。

减小“泄漏”现象的有效方法，就是想办法将“矩形窗”抽样的前、后沿的突变减缓，使得“泄漏”的影响减小。即尽量寻找频域中、旁瓣小主瓣窄的窗函数。加权平均的物理效果，与加窗平均是等同。

我们早在上世纪八十年代，根据文献“Weighing Vehicles In Molion”（Measnement and contnoe, Voe 2、Decembez 1969）设计了一个窗函数来处理动态轨道衡的信号，可将频率周

期为取样时间 2/3T、幅值为直流信 10%的干扰信号经加权（加窗）处理后降低为 0.3%，即降低近 30db。

三、状态方程法

这也是篇较早的文章。使用状态方程处理整车（卡车）动态质量测量。秤长 10.5m，额定重量为 30t。被测卡车重 12145kg，外加 6t 砝码总重为 18255kg。卡车前轮为一轴、后轮为两轴，前后轴间距为 5.4m，后两轮距为 1.3m。称重台的状态方程为：

$$\overset{0}{x}_1(t)=A_1\times(t)+b_1u(t)$$

$$y(t)=e_1x_1(t)$$

式中：x_1为测量系统的状态变量，

U是车辆静质量u_0, 以及车辆对秤台冲击力u_δ和车辆垂直方向的干扰力。

即 $u=u_0+u_\delta(t)+V(t)$

车辆的状态方程为：

$$\overset{0}{x}_2(t)=A_2x_2(t)+B_2g_\delta(t)$$

$$V(t)=C_2\times 2$$

式中：g_δ是由于道路不平，当车辆行驶激起的垂直方向的附加力。

x_2是车辆的状态变量

将上两式联立、得：

$$\overset{0}{x}(t)=A\times(t)+bu_0+f(t)$$
$$y(t)=c\times(t)$$

其中：

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & b_1C_2\\ 0 & A_2\end{bmatrix};b=\begin{bmatrix}b_1\\ 0\end{bmatrix};C=[C,0]$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix};f(t)=\begin{bmatrix}b_1\\ 0\end{bmatrix}u_\delta(t)+\begin{bmatrix}0\\ B_2\end{bmatrix}=y_\delta(t)$$

应当注意：A_1，b_1和C_1，对于一台特定的秤台，基本上是不变的，而A_2、B_2和t_2则对不同车辆而异。

经过推导，可由下式根据测量值y_i求得车辆质量的估计值。

$$\hat{u}_0=\frac{y_k+n+a_{n-1}y_{k+n-1}+\ldots\ldots+a_1y_{k+1}+a_0y_k}{(1+a_{n-1}+\ldots\ldots+a_1+a_0)CA^{-1}b}$$

取$\triangle y_i=y_i+1-y_i$

由下求出a_i值，即可用最小二乘法求出$\hat{u}_0$数值

$$\begin{bmatrix}\Delta y_0 & \Delta y_1 & \Delta y_{n-1} & \Delta y_n\\ \Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_n & \Delta y_{n+1}\\ \Delta y_n & \Delta y_{n+1} & \Delta y_{nzn-1} & y_{zn}\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \ldots\\ a_{n-1}\\ 1\end{bmatrix}=0$$

车辆速 12km/h 时，采样周期为 50ms，状态方程的继数为 n＝8 或 10，最终测量精度为 1/1500，相当于 30kg。

四、自回归模型

该种方法我已在有关文章中介绍过。在此再简单介绍一下，文中认为该系统的信号输出服从一个二階差分方程，其数学表示式为：

$$r_0 = a_0 r(t_0) + a_1 y(t_0 + \Delta t) + a_2 y(t_0 + 2\Delta t)$$

此关系式适用于任何时刻（t_0）。若信号以等时间间隔t_i进行扫描。由上式可得到：

$$r_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y_{kti}$$

其中参量a_1应满足附加的归一条件。

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$$

但实际测量到的信号值的误差为 e，所以测量值 Z，与原称重信号的实际值 y 有下关系：

Z＝y+e

由上诸式可得下列方程式

$$Z_{k+m} = r_0 + \sum_{i=0}^{m-1} a_i \left(Z_{k+m} - Z_{k+i} \right) + e_k$$

由矩阵式表式有：

$$\overline{Z} = \overline{X} \cdot \overline{b} + \overline{e}$$

其中：

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 1 & Z_{m+1} - Z_1 & Z_{m+1} - Z_2 & \dots & Z_{m+1} - Z_m \\ 1 & Z_{m+2} - Z_2 & Z_{m+2} - Z_3 & \dots & Z_{m+2} - Z_{m-1} \\ . & . & . & & . \\ 1 & Z_{m+n} - Z_n & Z_{m+n} - Z_{n+1} & \dots & Z_{m+n} - Z_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} r_o \\ a_o \\ . \\ a_{m-1} \end{bmatrix}；\quad \overline{Z} = \begin{bmatrix} Z_{m+1} \\ Z_{m+2} \\ . \\ Z_{m+n} \end{bmatrix};\quad \overline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ e_n \end{bmatrix}$$

根据实际测量值 Z，使用最小二乘法，通过下式

可求出

$$\hat{b} = \left(\overline{X}^T \overline{X} \right)^{-1} \overline{X}^T \overline{Z}$$

可求出$\hat{b}$，从而得到r_0值。此式还曾来测量龙门吊有摆动时的物体重量和预测恒定温度值。

该文章是我在上世纪八十年代研制动态轨道衡交换文章获得。该文详细的介绍了他们的研究动态轨道衡的成果。文中还研究了用外源信号模型的参量估计法，来估计机车的静态质

量。

五、下面文章“ A mass-estimation method with liner regression models using Axle Weighing System ”中介了一种不常使用的方法。

文中指出由于道路不平造成车辆的振动，其频率在 2 到 5HZ 之间。并设运动车辆第 i 个轴重的时态估计模型为：

$$Wi(t)=\lambda i\left[\left(w+\sum_{j=1}^{p}A_jSin(\omega_jt+\phi_j)\right)\right] \tag{5-1}$$

式中：λ_j是取决于轴的质量中心和位置之间距离，且

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_j=1 \qquad (i=1.2\ldots K \text{ 为第 K 个轴数}) \tag{5-2}$$

W：车辆的总重；

A_j：第j项正弦波的幅值；

ω_j：第j项正弦波的角频率；

ϕ_j：第j项正弦波的相位。

作者试图通过上模拟估计每一个正弦波频率、幅值和相位，λ_j等未知参数来确定车辆的重量。由于上述对其未知参数是非线性估计。作者使用了一种特殊的方法，来解决非线性估计的困难，也是我将这篇文章介绍给读者的目的。

首先对频率做估计。设y_j（n）是对于第j个轴的信号取样段的散离数据系列，n=0,1,2,⋯N_j即第j个轴在秤台上共取（N_j+1）个点。取样起始和终结时间分别为t_j^s和t_j^e。两个相邻取样间的差值如下：

$$y_j^d(n)=y_j(n+1)-y_j(n) \tag{5-3}$$

y_j^d 系列的自回归模型可表示为

$$y_j^d(n)=a_1y_j^d(n-1)+a_2y_j^d(n-2)+\ldots+a_gy_j^d(n-g)+e_n \tag{5-4}$$

其中a_j为参数，j=1,2,⋯g，g为自回归模型的階数，e_n为误差项，并假写e_n为“ 白噪声 ”。a_j可用 $y_j^d(a)$ 自回归式经最小二乘法来估计。由此我们可得到g階的常系数线性差分方程：

$$y_j^d(n)=\overline{a}_1y_j^d(n-1)+\overline{a}_2y_j^d(n-2)+\ldots+\overline{a}_gy_j^d(n-g) \tag{5-5}$$

其中$\overline{a}_j,\ j=1,2,..g$ 为估计常数。根据上差分方程的特征方程式

$$z^g-\overline{a}_1z_j^{g-1}-\overline{a}_2z^{g-2}-\ldots-\overline{a}_g=0 \tag{5-6}$$

求解，就可得到估计模型（5-1）中正弦波的频率。熟悉Z变换的读者都知道，上述特征方式的解，即（5-6）方程根均处于Z平面的单位圆上，其根Z_r在Z平面上的夹角为$\angle Zr$。由此可求得角频率估计值：

$$\omega_r=\angle Zr/T_s$$

其中r=1，2⋯p（≤g），T_s为取样周期。

第二步，估计相位。根据上面得到的频率估计值，可以估值与之相对应的相位。

根据估计模型，$y_i(n)$可表示为：

$$y_i(n)=\lambda_i\left[\omega+\sum_{i=1}^{p}A_i Sin(\omega_j(nT_s+t_i^s)+\phi_j)\right] \tag{5-8}$$

其中 i=1,2,……，K。

$$\lambda_i>0 \quad 和\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1 \tag{5-9}$$

上式可改写为如下形式：

$$y_i(n)=\lambda_i\left[\omega+\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j Sin(\omega_j(nT_s+t_j^s))+\beta_j\cos(\omega_j(nT_s+t_i^s))\right] \tag{5-10}$$

只要知道α_j和β_j就可得到相位的估计值。

$$\phi_j=\tan^{-1}(\frac{\beta_i}{\alpha_j}) \tag{5-11}$$

如果我们知道λ$_i$ω值（i=1，2，…K），将序列y_i(n)规一化：

$$y_i(n)/\lambda_i w=1+\left[\sum_{j=1}^{p}\frac{\alpha_j}{W}Sin(\omega_j(nT_s+t_i^s))+\frac{\beta_i}{W}COS(\omega_j(nT_s+t_i^s))\right] \tag{5-12}$$

使用上面求得的频率的估计值ω_j，我们就可求得对应每一个n的Sin（$\omega_j(nT+t_i^s)$）和Cos（$\omega_j(nT+t_i^s)$）的值以及与n和i对应的y_i（n）/ λ$_i$w值。运用最小二乘法通过上述回归模型估计出α_j / W β_j / W。这样用（5-11）式，我们就能得到相位值。但是，在本步骤中第i轴的重量λ$_i$W值是未知的。

为此，我们求y_i（n）的平均值：

$$\overline{W_i}=\sum_{n=0}^{n_i}y_i(n)/N_{i+1} \tag{5-13}$$

用该值将y_i（n）规格化，就可以估计出相位中ϕ$_j$值（j=1,2,……P）。

最后，第三步估计轴重的幅值。对于每一个 i，我们可将（8）式写为：

$$y_i(n)=\lambda_i W+\sum_{j=1}^{P}\overline{A_j}Sin(\omega_j(nT_s+t_i^s)+\phi_j) \tag{5-14}$$

其中$\overline{A_i}=\lambda_i A_j$，使用已求得的$Sin(\omega_j(nT_s+t_i^s)+\phi_j)$的每一个j和n值。再用最小二乘法估计λ$_i$W和$\overline{A_i}$值。通过这一步可估计出每个i对应的λ$_i$W值。所得到的这些估计值的和即是车辆的总重。

使用此种估计方法所得的结果，与用信号求平均值的结果的比较对下：

现　用　法

	2 轴		3 轴	
	10km/h	20km/h	10km/h	20km/h
平均值	-0.531	-0.967	-0.451	-0.090
最大差值	2.029	2.742	7.633	6.483
最小差值	-3.466	-5.484	-2.240	-7.408
差值	5.495	8.226	9.873	13.531
次数	31	34	36	34
均方差	1.159	2.484	1.612	3.495
0%，2%	27	22	34	17
2%，5%	4	7	1	12
5%，∞	0	5	1	5

平　均　值　法

	2 轴		3 轴	
	10km/h	20km/h	10km/h	20km/h
平均值	-0.461	-0.554	-0.684	-1.910
最大差值	3.873	8.147	2.657	3.251
最小差值	-4.940	-8.501	-5.273	-8.788
差值	8.814	16.648	7.930	12.039
次数	31	34	36	34
均方差	2.019	4.279	2.202	3.118
0%，2%	20	9	20	17
2%，5%	11	16	14	12
5%，∞	0	9	2	5

表中：平均值是指估计值的误差的百分值；差值是指估计值最大差值与最小差值间的绝对差值，最后三行百分数是指按百分数计误差出现的次数。车辆的重量，两轴为 8t，三轴为 10t，测量时车重分别取标准重的 50%，100%和 150%。取样周期为 lms。

六、无限冲激响应（IIR）和有限冲激响应（PIR）数字滤波器

数字信号处理学科中，数字滤波是其主要研究内容，无限冲激响应（IIR）和有限冲激响应（PIR）数字滤波器是最基本和使用最多两种数字滤波器。凡有关数字信号处理的书中都有详细的讲述。针对称重信号的处理或滤波，一般而言，有限冲激响应（FIR）数字滤波器常用于对动态汽车衡、动态轨道衡和校验秤等。而无限冲激响应（IIR）数字滤波器多用于数字测量显示器。

下面两篇文章：“Continuous Mass Measune—mentin in Checrweighers and Conveyou Belt Scales”和“Technical Problems in Mueti-Stage Conveyor bell Scale”，都给出了有限冲激响应数字滤波器在校验种运用的实例。

至于无限冲激响应数字滤波器，凡是生产显示仪表的厂家都应有所了解，在此就不多讲，其实这两种数字滤波器在很多数科书中都有详细的讲解和设计实例。对使用者而言，主要的任务是根据自己的实际情况如何选择设计参数和计算方法的问题。

七、结束语

对于称重信号的处理或滤波，在文章的第一部分，主要是讲了有关信号取样的两个基本原则。在该部分，即第二部分只是举了几个实例供读者参考。有关数字信号处理要求读者具有富利叶变换，Z 变换等基础知识。对希望了解这方面的读者，最好还是找有关书本从基础读起。也欢迎有兴趣的读者与我共同讨论、研究。其实有很多方法都可以有效地解答称重信号的处理问题。由于篇幅限制到此为止。